

A espiral equiangular

EDUARDO VELOSO

A espiral equiangular, também apelidada de *logarítmica*, foi inventada por René Descartes (1596-1650) em 1638 e intensamente estudada uns anos depois pelo matemático suíço Jakob Bernoulli (1655-1795), que lhe chamava *spira mirabilis*. Deveria fazer parte dos temas de geometria sugeridos na escolaridade obrigatória, dadas as suas numerosas e interessantes propriedades e a facilidade do seu estudo com um programa de geometria dinâmica.

As espirais serão construídas nestes artigos – e sugerimos que o sejam pelos alunos – com este tipo de *software*, da seguinte forma ¹:

- um parâmetro t é construído na recta $\overline{O1}$ ou na semi-recta $\overline{O1}$;
- t pode ser expresso como um número real (a sua abcissa) ou, se multiplicado por 1 *radiano*, como medida de ângulos em radianos;
- a recta s é a imagem de $\overline{O1}$ pela rotação de centro O e ângulo t radianos;
- desta forma, quando t percorre $\overline{O1}$ com movimento uniforme, a semi-recta s roda em torno do ponto O .

O ponto P que vai traçar a espiral é um ponto que se move sobre a recta s ao mesmo tempo que esta roda em torno de O . A posição de P sobre a semi-recta s será dada pela sua *distância a O* , que dependerá do valor da *abscissa de t* .

Recorde o leitor que na *espiral de Arquimedes* o movimento de P dependia *linearmente* de t , ou seja, era dada uma constante positiva k — valor da referida distância para $t=1$ — e depois, para qualquer t , a distância de P a O seria $k.t$. Ou seja, quando o ângulo da recta s com $\overline{OI}$ variasse de 1 para 2 *radianos*, por exemplo, o valor da distância referida passaria de k para $2k$.

No caso da *espiral equiangular*, o que se pretende é que – dito informalmente – o crescimento seja *exponencial* e não *linear*. Ou seja, que a *distância* de P ao ponto O seja k^t em lugar de $k.t$.

Construamos, então uma espiral equiangular (fig. 1):

Seja k um número positivo (na figura, $k=1.3$). E seja t um

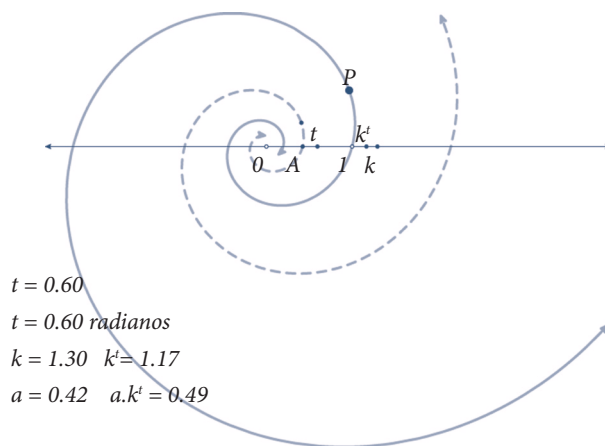


Figura 1

parâmetro em $\vec{OI}$ (na figura, $t=.60$ e $t=.60 \text{ rad}$). Construíamos o ponto P :

- temos $k^t = 1.3^{.60} = 1.17$ para $t = .60$;
- marcamos o ponto $k^t = 1.17$ sobre a semi-recta $\overline{0I}$ (menu *Graph: Plot Value on Axis*);
- efectuamos a rotação (ângulo $.60 \text{ rad}$ e centro O) do ponto k^t e obtemos o ponto P sobre s (não representada na figura) – será o ponto da espiral correspondente a $t = .60$;
- seleccionamos t e P e traçamos o lugar geométrico de P

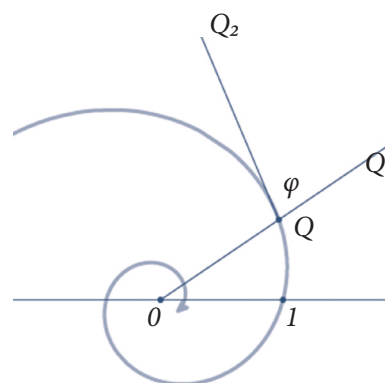


Figura 2

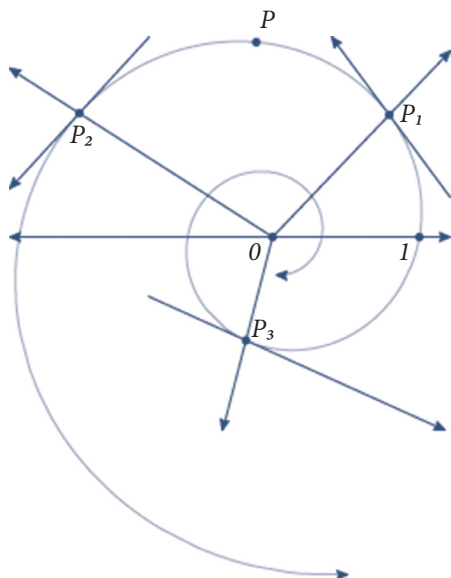


Figura 3

quando t percorre a recta $\overline{OI}$ (*Menu Construct:Locus*). Obtemos desta forma a espiral equiangular para o valor de $k=1.3$. Naturalmente, como para $t=0$ o valor de k^t é 1, a espiral passa pelo ponto I . Obtemos uma espiral “paralela” (a tracejado, na figura) passando pelo ponto A (abscissa $a=0.42$ na figura) se, na construção anterior, substituirmos kt por $a.kt$. Veja, no site de apoio a este artigo, o vídeo *equi_1.mov.2*

DONDE PROVÉM O NOME “EQUIANGULAR”?

O nome *equiangular* refere-se a uma *propriedade característica deste tipo de espiral*. Considere um ponto qualquer da espiral – seja Q – e o ângulo ϕ (fig. 2) entre a semi-recta OQ_1 e a semi-recta QQ_2 tangente à espiral no ponto Q . Pode demonstrar-se — recorrendo à análise matemática, o que está fora do âmbito deste artigo e certamente fora do âmbito da matemática na escolaridade obrigatória — que *o ângulo ϕ é constante para qualquer ponto Q da espiral*.

Como estamos no séc. XXI, temos acesso a programas de geometria dinâmica — *e isso devia acontecer com os alunos da escolaridade obrigatória!*

Veremos em seguida como uma simples construção mostra claramente essa propriedade da equiangular.

A demonstração pela análise de que o ângulo ϕ é constante pode encontrar-se, por exemplo, no livro *Introduction to Geometry de Coxeter*³. Como o leitor pode concluir, dado o modo como construímos a espiral, se o ângulo é constante, então deve estar directamente relacionado com a constante k escolhida. Na realidade, o que Coxeter demonstra é que

$$\phi = \arctan(1/\ln k) \quad \text{ou} \quad k = e^{\cot \phi}$$

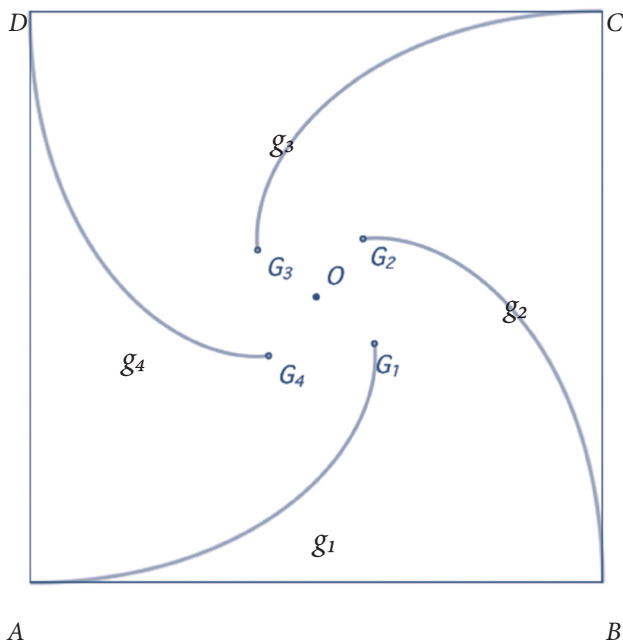


Figura 4

Suponhamos então que pretendíamos *mostrar* a constância do referido ângulo numa espiral equiangular em que ϕ (que designamos por *ângulo de referência* da espiral) é igual a 80° (equivalente a 1.4 rad). No *GSP*, procedemos da seguinte forma:

- calculamos o correspondente valor de k (usando a calculadora do *GSP*); $k = e^{\cot 1.4} = e^{(1/\tan 1.4)} = 1.19$;
- traçamos a espiral para $k=1.19$ (como fizemos anteriormente (resultando daí a espiral da fig. 3)). Depois escolhemos três pontos quaisquer P_1 , P_2 e P_3 sobre a espiral. Unimos O com cada um destes pontos e depois, com centros respectivamente em P_1 , P_2 e P_3 efectuamos rotações das rectas OP_1 , OP_2 e OP_3 (ângulo 1.4 rad). A fig. 3, embora não demonstre, mostra intuitivamente, com uma grande “força de convicção”, que os cálculos de Coxeter estavam correctos...

Veja, no apoio *online* a este artigo, o vídeo *equi_2.mov*. Servindo-se desse vídeo, o professor, como diria Sebastião e Silva, pode “dar ao ensino uma orientação de tal modo natural, que o aluno seja levado a aceitar os factos intuitivamente, e com uma força de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa desses factos.”⁴

DOIS MODOS DE CONSTRUIR A ESPIRAL EQUIANGULAR

Existem numerosos processos de construir este tipo de espiral, e daí o nome de *espiral maravilhosa* que lhe deu Bernoulli... Iremos apresentar aqui dois exemplos, possíveis de realizar

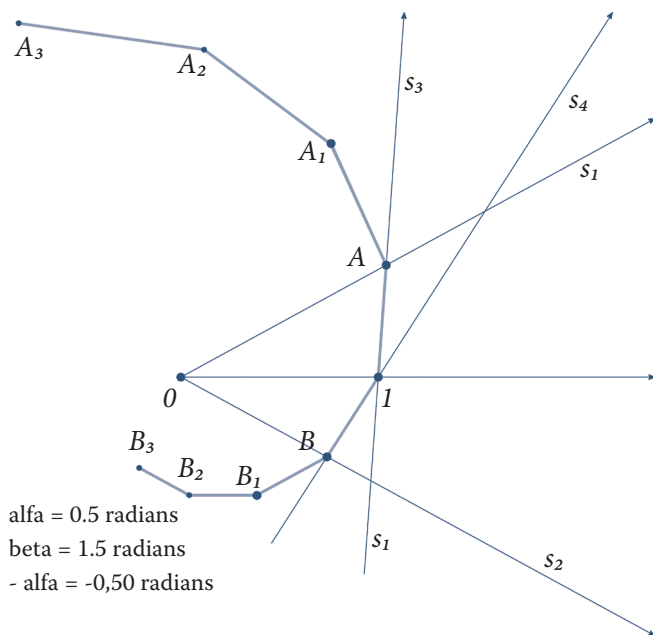


Figura 5

por alunos da escolaridade obrigatória, mediante o uso de um programa de geometria dinâmica.

Exemplo 1. Curvas de perseguição

Imaginemos um quadrado $ABCD$ e quatro galgos — G_1 , G_2 , G_3 e G_4 — colocados respectivamente nos pontos A , B , C e D (fig. 4).

Suponhamos que, num dado instante, os quatro galgos começam a perseguir-se mutuamente, correndo todos à mesma velocidade: G_1 persegue G_2 , G_2 persegue G_3 , G_3 persegue G_4 e G_4 persegue G_1 ! Podemos pedir ao *Sketchpad* — veja, no apoio *online* a este artigo, o vídeo *equi_3.mov*, para perceber como... — que trace as curvas seguidas pelos galgos até um pouco antes de se encontrarem no centro do quadrado. Cada uma das curvas traçadas pelos galgos — g_1 , g_2 , g_3 e g_4 — é uma espiral equiangular; para uma justificação informal deste facto, veja o apoio *online* a este artigo.

Exemplo 2. A espiral equiangular por iteração

Vamos mostrar os primeiros passos do início deste tipo de construção, que resultarão na fig. 5, e depois desenvolver as construções seguintes no *website* de apoio a este artigo. O início consiste na sequência seguinte:

- construção de um segmento OI e da semi-recta OI
- escolha de três parâmetros que serão os três ângulos $\alpha = .5rad$, $\beta = 1.5rad$ e $-\alpha$ — no caso da fig. 5;
- duas rotações da semi-recta OI com centro em O e ângulos α e $-\alpha$, obtendo as semi-rectas s_1 e s_2 ;

- uma rotação da semi-recta OI com centro em I e ângulo β obtendo a semi-recta s_3 ;
- e finalmente uma rotação de s_3 com centro em I e ângulo $-\alpha$ obtendo a semi-recta s_4 .

Designamos por A e B as intersecções respectivamente de s_4 com s_1 e de s_4 com s_2 .

Note-se que desta forma temos tudo preparado para repetir (*iterate*) este processo, obtendo novos pontos A_1 , A_2 e A_3 (e também B_1 , B_2 e B_3). A_1 obtém-se a partir de O e A precisamente como A se obtivera a partir de O e I (e analogamente para os pontos B).

Detalhes deste procedimento encontram-se no *site* de apoio a este artigo.

O que obtivemos até agora? Não uma curva “contínua”, mas uma figura formada por pontos cada vez mais numerosos, os quais, unidos por segmentos, sugerem a curva final. Observe que a fig. 5 depende, de modo decisivo, dos parâmetros angulares α e β . O parâmetro β é o *ângulo de referência* da espiral equiangular que estamos a construir. Intuitivamente, sendo A o “ponto seguinte” a I , a recta IA é a “tangente” à espiral no ponto I !

Quanto a α , sendo o ângulo entre as semi-rectas OI e s_1 , define o afastamento entre “pontos consecutivos da figura (curva)”. Ao repetirmos este processo usando valores de α menores, as figuras obtidas por iteração aproximam-se da espiral. O processo completo está descrito nas páginas e vídeos do *website* de apoio a estes artigos.

Notas

1. Não deixe de ler — ou reler — a *nota prévia* com que iniciamos o artigo sobre a espiral de Arquimedes (E&M n° 141), pois são dadas aí indicações importantes comuns a todos os artigos sobre curvas que publicaremos. Note-se que o parâmetro t , no caso da espiral equiangular, será um ponto da recta $\overline{OI}$ e não da semi-recta $\overline{OI}$.
2. Consulte páginas *on line* de apoio a este artigo no endereço www.eduardoveloso.pt.
3. H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry* (pág. 126; John Wiley & Sons, Inc. segunda edição).
4. Veja o magnífico texto de Jaime Carvalho e Silva *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva — uma primeira abordagem* em <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html>

EDUARDO VELOSO